

# 《高等代数 II》教学大纲

课程编码：1512101004

课程名称：高等代数 II

学时/学分：64/4

先修课程：《解析几何》、《高等代数 I》

适用专业：信息与计算科学

开课教研室：代数与几何教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质：《高等代数 II》是学科基础平台课程，是信息与计算科学专业主要的必修课。它不仅是应用学科的重要工具课，而且在近代数学理论中也是一门很重要的理论基础课，牢固掌握和深入理解其中的思想方法和技巧，对于大学生是非常重要的，也为高观点下深入理解中学教学内容所必需。本课程的教学目的和任务是向学生介绍代数最基本的概念、理论与方法，使学生不仅能掌握一些处理问题的基本方法，而且能使他们对于高等代数的基础理论有一个深刻理解，从而为后续课程的学习打下坚实的基础。通过本课程的学习，培养学生独立思维能力、运算能力和解决实际问题能力，提高学生的数学推理论证能力、创新能力和抽象思维能力。

2. 课程任务：通过学习本课程，使学生掌握二次型、线性空间、线性变换和欧氏空间的理论等高等代数的基础知识、基本方法、基本思路和代数学的基本思想方法，在学习过程中形成抽象思维能力和逻辑推理能力，培养与提高用代数理论分析问题与解决问题的能力。

## 二、课程教学基本要求

《高等代数 II》要求理解二次型的定义，掌握二次型的标准形的求法及正定二次型的一系列性质；理解线性空间的定义，掌握交空间、和空间及直和的判定及性质；理解线性变换的定义及简单性质，掌握线性变换在不同基下的矩阵的性质、线性变换的值域与核的应用问题；理解欧氏空间及对称变换的定义，掌握对称变换与实对称矩阵之间的关系的有关性质。

本课程的成绩考核形式：末考成绩（闭卷考试）（70%）+平时成绩（平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等）（30%）。成绩评定采用百分制，60分为及格。

## 三、课程教学内容

### 第五章 二次型

#### 1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生掌握二次型概念及其矩阵表示，掌握二次型化标准形的方法及矩阵合同概念，掌握正定二次型的概念、判别及性质。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学,使学生掌握二次型的一般表示,对称写法,矩阵表示;在数域  $P$  上化二次型为标准形的方法:配方法和合同变换法;化复二次型、实二次型为规范形的方法,规范形的唯一性,实二次型的秩,正、负惯性指数,符号差等概念;复二次型(复对称矩阵)、实二次型(实对称矩阵)等价(合同)的充要条件;复二次型、实二次型按等价分类(复对称矩阵、实对称矩阵按合同分类)的概念;判定实二次型(实对称矩阵)正定性的判别方法,特别是顺序主子式判别法。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是配方法和初等变换法化标准形和正定性的判别。教学难点是化标准形和正定性的判别。

## 4. 教学内容

### 第一节 二次型的矩阵表示

1. 二次型的矩阵及矩阵表示,二次型的秩
2. 二次型的非退化线性替换与二次型的等价
3. 合同矩阵

### 第二节 二次型的标准型

1. 二次型的标准形
2. 数域  $P$  上任一  $n$  元二次型都可以经过非退化线性替换变成标准形
3. 配方法化二次型为标准形
4. 初等变换法化二次型为标准形

### 第三节 复二次型和实二次型的规范形

1. 复数域上对称矩阵(二次型)合同(等价)规范标准形(规范形)的存在唯一性
2. 复数域上对称矩阵(二次型)合同(等价)的充要条件
3. 实数域上对称矩阵(二次型)合同(等价)规范标准形(规范形)的存在唯一性
4. 实数域上对称矩阵(二次型)的惯性指标和符号差
5. 实数域上对称矩阵(二次型)合同(等价)的充要条件

### 第四节 正定二次型

1. 正定二次型的定义
2. 实二次型为正定二次型的判定条件

## 第六章 线性空间

### 1. 教学基本要求

通过本章教学,使学生能够理解线性空间概念,掌握线性空间简单性质,理解向量组的线性相关性问题,掌握基、维数、坐标的概念。理解子空间概念,掌握生成子空间、子空间

和交及直和等概念。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学，使学生掌握线性相关、线性无关、维数、基、坐标、子空间、子空间的交与和、子空间的直和、余子空间；线性空间的简单性质，基变换和坐标变换；空间的判别法，生成子空间的集合形式；两个生成子空间相等的条件，生成子空间的基、维数的求法；维数公式及其证明方法并能灵活应用；掌握常用的几个子空间直和的判别法；同构映射的基本性质；数域  $P$  上两个有限维线性空间同构的条件。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是线性空间维数和基的求解，子空间的交、直和。教学难点是对同构和直和的理解。

## 4. 教学内容

### 第一节 线性空间的定义与简单性质

#### 第二节 维数、基与坐标

1. 向量组的线性相关性
2. 基与维数的定义及性质
3. 基的过渡矩阵及其性质
4. 向量的坐标，坐标变换公式

#### 第三节 线性子空间

1. 子空间的定义和判别条件
2. 子空间的交与和
3. 有限维子空间的交与和的维数公式
4. 子空间的直和、余子空间，余子空间的存在性

#### 第四节 线性空间的同构

1. 同构的定义及简单性质
2. 有限维线性空间同构的充要条件

## 第七章 线性变换

### 1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生正确理解线性变换的概念，掌握其运算及基本性质。掌握线性变换的矩阵表示。深刻理解矩阵（变换）的特征值、特征向量等基本概念，掌握矩阵可对角化的理论和方法。理解和掌握线性变换的核、值域、不变子空间等概念。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握线性变换的基本性质，线性变换的运算；可逆变换的概念，及其常用的判别法；利用矩阵计算一个向量在线性变换之下的象，线性变换在不同基下的矩阵

是相似的，而两个相似的矩阵可以看成同一线性变换在某两个基下的矩阵；线性变换的特征值与特征向量的概念和  $n$  阶方阵的特征多项式有限维线性空间中线性变换的特征值、特征向量的求法； $n$  阶方阵的特征多项式的结构定理及哈密顿—凯莱定理； $n$  维线性空间  $V$  的一个线性变换可对角化的一些充分条件与充要条件；线性变换的值域、核、秩和零度等概念，及其性质；按线性变换的特征值将空间分解成不变子空间的直和。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是线性变换在不同基下矩阵的关系，矩阵的对角化及不变子空间。教学难点是线性变换的值域与核，线性空间按特征值分解成不变子空间的直和。

### 4. 教学内容

#### 第一节 线性变换的定义

1. 线性变换的定义
2. 线性变换的简单性质

#### 第二节 线性变换的运算

1. 加法与数量乘法及其算律
2. 乘法及其算律，线性变换的多项式
3. 可逆线性变换及其逆变换

#### 第三节 线性变换的矩阵

1. 线性变换的矩阵
2. 向量的象的坐标公式
3. 线性变换与矩阵的同构对应
4. 线性变换在不同基下的矩阵，相似矩阵

#### 第四节 特征值与特征向量

1. 特征值、特征向量和特征多项式的定义和求法
2. 矩阵的秩和行列式与特征值的关系
3. 相似矩阵的特征多项式

#### 第五节 对角矩阵

1. 属于不同特征值的特征向量的线性无关性
2. 特征子空间的维数与所属特征值的重数的关系
3. 线性变换和矩阵可对角化的条件

#### 第六节 线性变换的值域与核

#### 第七节 不变子空间

1. 不变子空间的定义和简单性质
2. 不变子空间与简化线性变换的矩阵之间的关系

#### 第八节 \* 矩阵的若当 (Jordan) 标准形

## 第八章 欧氏空间

### 1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生正确理解欧氏空间的定义与基本性质。掌握标准正交基的求法。掌握正交变换与对称变换等重要概念。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握 Cauchy-Schwarz 不等式；度量矩阵的性质与不同基的度量矩阵之间的关系；正交基、标准正交基等概念，Schmidt 正交化方法，正交阵的简单性质；正交变换的几个等价刻画；一个子空间的正交补的存在唯一性与其集合形式；实对称矩阵的特征值、特征向量的特性；求正交阵  $T$ ，使实对称矩阵正交相似于对角阵的方法；用正交线性替换化实二次型为标准形的方法。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是内积、标准正交基及利用正交变换化实对称矩阵为对角形。教学难点是标准正交基的求法与用正交变换化实对称矩阵为对角形。

### 4. 教学内容

#### 第一节 欧氏空间的定义与基本性质

1. 内积的定义和简单性质
2. Cauchy-Schwarz 不等式
3. 向量的长度、夹角、正交、距离
4. 度量矩阵

#### 第二节 标准正交基

1. 正交组、标准正交组、正交基、标准正交基
2. 在标准正交基下向量的坐标、内积、长度、距离
3. Schmidt 正交化方法
4. 标准正交基的过渡矩阵、正交矩阵及其简单性质

#### 第三节 欧氏空间的同构

1. 同构的定义和简单性质
2. 有限维欧氏空间同构的充要条件

#### 第四节 正交变换

1. 正交变换的定义
2. 正交变换的等价条件（保持向量的长度不变、把标准正交基变成标准正交基、在标准正交基下的矩阵为正交阵）
3. 正交变换的类型
4. \* 二维和三维欧氏空间的正交变换的类型

#### 第五节 子空间的正交

1. 子空间的正交、正交子空间的和
2. 正交补, 正交补的存在唯一性

## 第六节 对称变换

1. 实对称矩阵
2. 对称变换

说明: 大纲中教学内容带“\*”号的为选讲内容。

## 四、学时分配

### 1. 讲授内容及学时分配

章序	内容	课时	备注
第五章	二次型	14	
第六章	线性空间	18	
第七章	线性变换	18	
第八章	欧氏空间	14	
合计		64	

## 五、主用教材及参考书

### (一) 主用教材:

《高等代数》第四版 主编: 北京大学数学系前代数小组 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2013年。

### (二) 参考书:

1. 《高等代数》(第四版) 主编: 张禾瑞、郝炳新 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 1999年。

2. 《高等代数简明教程》(上、下) 主编: 蓝以中 出版社: 北京大学出版社 出版时间: 2002年。

3. 《高等代数》(上、下) 主编: 丘维声 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2013年。

执笔: 许寿方

审定: 郭宏旻 梁桂珍