

# 《泛函分析》教学大纲

课程编码: 1511102302

课程名称: 泛函分析

学时/学分: 32/2

先修课程: 《数学分析》、《实变函数》

适用专业: 数学与应用数学

开课教研室: 分析与方程教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质: 本课程是数学与应用数学专业的一门专业选修课, 是现代数学中的一个较新的重要分支, 它综合地运用分析、代数和几何的观点与方法, 研究分析数学, 现代物理和现代工程技术提出的许多问题。

2. 课程任务: 通过该课程的学习, 使学生掌握泛函分析中的基本概念、基本方法。初步了解其思想方法对现代纯粹数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论等问题的渗透, 为今后更进一步的数学研究工作打下坚实的基础。

## 二、课程教学基本要求

在概要讲述和掌握实变函数中的集合论和欧氏空间中的点集等预备知识的基础上, 理解和掌握度量空间的定义、性质及其上度量的特征, 熟练掌握度量空间的典型例子; 线性赋范空间的定义和性质及典型的 Banach 空间例子; 内积空间的定义和性质; Hilbert 空间及其特征; 理解线性有界算子 (线性连续泛函) 的概念、性质, 了解线性算子空间和共轭空间的理论; 初步理解和掌握空间中的四大基本定理; 泛函延拓定理; 一致有界性定理; 逆算自定理和闭图象定理; 理解线性算子的谱理论初步等。

成绩考核形式: 末考试成绩 (闭卷考试) (70%) + 平时成绩 (平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等) (30%)。成绩评定采用百分制, 60 分为及格。

## 三、课程教学内容

### 第一章 距离空间与赋范空间

#### 1. 教学基本要求

通过本章学习使学生理解空间的线性结构和度量结构以及两者的结合, 其中包括度量空间、赋范线性空间和内积空间, 以及它们的拓扑结构和空间结构等。

#### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生理解泛函分析研究的对象, 掌握度量空间的定义及度量空间中极限、稠密集、可分空间的概念, 能够对具体的问题进行判断; 进一步了解连续映射的概念; 掌握完备的度量空间; 理解压缩映射原理, 掌握压缩映射原理, 能够应用压缩映射原理证明

实际问题；掌握线性空间、赋范线性空间和 Banach 空间。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是距离空间及其例子；赋范空间的定义与例子； $L^p$  空间， $l^p$  空间，空间的完备性，Baire 纲定理，不动点定理及其应用；紧集，相对紧集，完全有界集的序列收敛的特征及其相互关系。教学难点是完备度量空间、压缩映射原理、赋范线性空间。

### 4. 教学内容

#### 第一节 距离空间的基本概念

1. 距离空间的基本定义与例
2. 序列的极限

#### 第二节 赋范空间的基本概念

1. 线性空间
2. 赋范空间的基本定义与例

#### 第三节 $L^p$ 空间

1.  $L^p$  空间
2.  $L^\infty$  空间
3.  $l^p$  空间

#### 第四节 点集、连续映射与可分性

1. 距离空间中的点集
2. 连续映射
3. 空间的可分性

#### 第五节 完备性

1. 空间的完备性
2. 完备空间的性质
3. 压缩映射原理及其应用
4. 空间的完备化
5. 有限维赋范空间上范数的等价

#### 第六节 紧性

1. 紧集与列紧集
2. 空间  $C[a, b]$  中列紧集的等价特征

## 第二章 有界线性算子

### 1. 教学基本要求

通过本章学习使学生掌握线性算子或线性泛函的“五大基本定理”及其应用。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习,使学生理解有界线性算子和连续线性泛函;了解线性算子空间和共轭空间;掌握线性算子或线性泛函的“五大基本定理”,即 Riesz 定理,开映像定理,闭图像定理,共鸣定理,Hahn-Banach 定理及其应用;掌握自然嵌入算子,W 收敛,W\*收敛,若干空间收敛的等价刻画;紧算子的性质。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是有界线性算子的等价条件;共鸣定理及其推论;紧算子的性质;开映射定理,逆算子定理,闭图像定理;Hahn-Banach 延拓定理及其推论;W 收敛,W\*收敛,若干空间收敛的等价刻画;紧算子的性质。教学难点是 $L^p$ 空间的共轭空间的表示定理, $l^p$ 空间的共轭空间的表示定理。

### 4. 教学内容

#### 第一节 有界线性算子的基本概念

1. 有界线性算子的定义与例
2. 算子的范数及其计算
3. 有界线性算子空间

#### 第二节 共鸣定理及其应用

1. 共鸣定理
2. 共鸣定理的应用

#### 第三节 逆算子定理与闭图像定理

1. 逆算子定理
2. 闭图像定理

#### 第四节 Hahn-Banach 定理

1. 半范数
2. Hahn-Banach 定理

#### 第五节 凸集的分离定理

1. 凸集与超平面
2. 凸集的分离定理

#### 第六节 共轭空间的表示定理

1.  $l^p$  的共轭空间
2.  $L^p[a, b]$  的共轭空间
3.  $C[a, b]$  的共轭空间

#### 第七节 弱收敛和弱\*收敛 共轭算子与紧算子

1. 二次共轭空间
2. 弱收敛和弱\*收敛
3. 某些空间上弱收敛的等价特征

## 第八节 共轭算子

1. 共轭算子的定义
2. 共轭算子的性质

## 第九节 紧算子

1. 紧算子的定义及性质

# 第三章 Hilbert 空间

## 1. 教学基本要求

通过本章学习使学生熟练掌握内积空间和中 Hilbert 空间的基本概念及几个重要不等式；了解逼近理论并熟练掌握投影定理及其应用。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握内积，内积空间，施瓦兹不等式，内积导出的范数，希尔伯特空间 几个常见的希尔伯特空间；正交，投影定理，直交系，贝塞尔不等式，Parseval 等式，完全就范直交系，Riesz 定理；自伴算子、酉算子、正常算子。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是内积的性质，Schwarz 不等式；投影定理；Bessel 不等式，Fourier 展开式，正交系完全性的等价条件；Riesz 表现定理，伴随算子与自伴算子的性质。教学难点是投影定理。

## 4. 教学内容

### 第一节 内积空间的基本概念

1. 内积空间的基本定义
2. 几个重要不等式，极化恒等式

### 第二节 正交投影

1. 正交性
2. 投影算子

### 第三节 正交系

1. 规范正交系
2. 正交系的完全性
3. 施密特正交化法

### 第四节 Riesz 表示定理 伴随算子

1. Riesz 表示定理
2. 伴随算子
3. 自伴算子

#### 四、学时分配

章序	内容	课时	备注
一	距离空间与赋范空间	10	
二	有界线性算子	12	
三	Hilbert 空间	10	
合计		32	

#### 五、主用教材及参考书

(一) 主用教材:

《泛函分析》主编：侯友良 出版社：武汉大学出版社 出版时间：2011 年。

(二) 参考书:

1. 《实变函数与泛函分析基础》主编：程其襄、张奠宙等 出版社：高等教育出版社  
出版时间：2010 年。

2. 《泛函分析讲义》上册 主编：张恭庆、林源渠 出版社：北京大学出版社  
出版时间：1987 年。

3. 《实变函数与泛函分析》下册 主编：夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌 出版社：  
人民教育出版社 出版时间：1979 年。

执笔：李春燕

审定：张 秦 梁桂珍