

# 《高等代数 I》教学大纲

课程编码：1511100905

课程名称：高等代数 I

学时/学分：80/5

先修课程：《解析几何》

适用专业：数学与应用数学

开课教研室：代数与几何教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质：《高等代数 I》是学科基础平台课程，是数学与应用数学专业主要的必修课。它不仅是应用学科的重要工具课，而且在近代数学理论中也是一门很重要的理论基础课，牢固掌握和深入理解其中的思想方法和技巧，对于大学生是非常重要的，也为高观点下深入理解中学教学内容所必需。本课程的教学目的和任务是向学生介绍代数最基本的概念、理论与方法，使学生不仅能掌握一些处理问题的基本方法，而且能使他们对于高等代数的基础理论有一个深刻理解，从而为后续课程的学习打下坚实的基础。通过本课程的学习，培养学生独立思维能力、运算能力和解决实际问题能力，提高学生的数学推理论证能力、创新能力和抽象思维能力。本课程开设在第 2 学期。

2. 课程任务：通过学习本课程，使学生掌握多项式、行列式、线性方程组和矩阵等高等代数的基础知识、基本方法、基本思路和代数学的基本思想方法，在学习过程中形成抽象思维能力和逻辑推理能力，培养与提高用代数理论分析问题与解决问题的能力。

## 二、课程教学基本要求

《高等代数 I》要求理解多项式的定义，掌握最大公因式，互素，不可约多项式，因式分解等有关的一系列性质；理解行列式的定义，掌握行列式的基本运算性质和行列式的行(列)展开性质；理解向量组的线性相关性，掌握线性方程组的通解求法；理解矩阵的概念和运算，掌握矩阵的可逆、矩阵的分块、矩阵的等价关系的性质及应用。

本课程的成绩考核形式：末考成绩（闭卷考试）（70%）+平时成绩（平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等）（30%）。成绩评定采用百分制，60 分为及格。

## 三、课程教学内容

### 第一章 一元多项式

#### 1. 教学基本要求

多项式理论在本大纲中占有突出的重要位置，它对提高中学数学教师的专业素质非常必

要。应着重掌握如下几个问题：多项式整除性问题、多项式的函数观点、有理系数多项式的有关问题。掌握辗转相除法、因式分解法等数学思想和方法。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学，使学生掌握多项式整除性问题、因式分解定理、复系数与实系数的因式分解及有理系数多项式的有关结论、了解多元多项式、对称多项式基本定理。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是辗转相除法、因式分解及唯一性定理和有理系数多项式。教学难点是有理系数多项式和多元多项式。

## 4. 教学内容

### 第一节 数域

1. 数域
2. 有理数域是最小的数域

### 第二节 一元多项式

1. 多项式的有关概念
2. 多项式的运算与算律
3. 多项式和与积的次数

### 第三节 多项式的整除性

1. 带余除法
2. 整除的定义和基本性质

### 第四节 最大公因式

1. 最大公因式
2. 最大公因式的存在性定理及辗转相除法
3. 互素的定义和基本性质
4. 多个多项式的最大公因式

### 第五节 因式分解定理

1. 不可约多项式的定义和基本性质
2. 因式分解唯一性定理
3. 利用典型分解式求最大公因式

### 第六节 重因式

1. 多项式的微商、微商法则
2. 重因式的定义
3. 多项式的重因式与其微商的关系
4. 多项式无重因式的充要条件

### 第七节 多项式函数

1. 多项式的值, 多项式函数
2. 余数定理
3. 多项式的根、因式定理
4. 重根
5. 非零多项式的根的最多个数
6. 多项式的相等与多项式函数的相等 (Lagrange 插值公式)

### 第八节 复数域和实数域上的多项式

1. 代数基本定理
2. \* 复系数多项式因式分解定理
3. \* 实系数多项式因式分解定理

### 第九节 有理系数多项式

1. 本原多项式, Gauss 引理
2. 整系数多项式在有理数域上的可约性问题
3. Eisenstein 判别法
4. 有理数域上多项式的有理根

## 第二章 行列式

### 1. 教学基本要求

通过本章教学, 使学生能够应用行列式的基本性质熟练计算行列式的值。能够掌握行列式问题中一些典型的解决问题方法。掌握克莱姆法则, 并会运用 Cramer 法则求线性方程组的解。了解 Laplace 定理、乘法规则。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习, 使学生掌握排列的奇偶性, 逆序数的求法及排列在对换下奇偶性的变化;  $n$  阶行列式的性质及依行依列展开定理; 计算  $n$  阶行列式的常用方法: 三角化法、降阶法、递推法、加边法等; Cramer 法则。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是  $n$  阶行列式的定义和一些计算技巧及关于 Cramer 法则应用要强调解方程组的前提条件。教学难点是 Laplace 定理, 行列式乘法规则。

### 4. 教学内容

#### 第一节 排列

1. 排列的逆序数, 奇排列和偶排列
2. 对换对排列的作用

#### 第二节 $n$ 阶行列式的定义和基本性质

1.  $n$  阶行列式的定义

2.  $n$  阶行列式的基本性质

### 第三节 行列式的展开

1. 依一行（列）展开
2. Laplace 展开式

### 第四节 行列式的计算

1. 行列式的计算
2. Vandermonde 行列式

### 第五节 克拉默（Cramer）法则

1. Cramer 法则
2. Cramer 法则的应用

## 第三章 线性方程组

### 1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生正确理解线性方程组有解的条件，方程组的消元法求解与矩阵初等行变换之间的关系。着重领会向量的线性相关性及矩阵的秩等问题。掌握  $n$  维向量的线性运算及线性方程组的求解方法。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握利用矩阵的初等变换求线性方程组的解的方法； $n$  维向量的加法和数乘两种运算和它们的基本性质。线性相关、线性无关、向量组的极大无关组、向量组的秩等概念；线性相关性的一般论证方法；初等变换求矩阵秩的方法；线性方程组的有解性判别定理及线性方程组的解的结构；求齐次线性方程组的基础解系的方法。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是线性相关性概念及线性方程组有解判定定理。教学难点是线性相关性理论和线性方程组解的理论。

### 4. 教学内容

#### 第一节 线性方程组的消元法

1. 线性方程组的同解性及线性方程组的初等变换
2. 用初等变换（即消元法）解线性方程组
3. 矩阵的概念及矩阵的初等变换
4. 用矩阵的初等变换解线性方程组

#### 第二节 $n$ 维向量空间

1.  $n$  维向量的线性运算和基本性质
2. 向量的线性组合（线性表示）和向量组的等价
3. 向量组的线性相关性

#### 4. 向量组的极大无关组

### 第三节 矩阵的秩

1. 矩阵的行秩和列秩
2. 矩阵的子式和行列式秩
3. 用初等变换求矩阵的秩

### 第四节 线性方程组有解的判定定理

#### 第五节 线性方程组解的结构

1. 齐次线性方程组的基础解系、齐次线性方程组的解的结构
2. 非齐次线性方程组的解的结构

## 第四章 矩阵

### 1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生正确理解和掌握主要概念、熟练地进行矩阵的运算。掌握矩阵可逆的判别及逆矩阵的求法。掌握初等变换与初等矩阵的概念、性质，充分理解好二者间关系。领会和掌握矩阵的分块及分块初等变换问题。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握矩阵的各种运算，矩阵乘法运算的不可交换性；矩阵乘积的行列式与因子的行列式、矩阵乘积的秩与因子的秩之间的关系；矩阵的等价（即相抵）与等价标准形、可逆矩阵与逆矩阵、初等矩阵等概念，可逆矩阵的几种常用的等价刻划，求可逆矩阵的逆阵的两种方法；初等矩阵与初等变换之间的“左行右列”规则；矩阵分块的原则、技巧及运算。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是矩阵的乘法规则及可逆矩阵求逆的方法。教学难点是初等变换与矩阵乘法的联系和几种求逆矩阵的方法。

### 4. 教学内容

#### 第一节 矩阵的概念和运算

1. 矩阵的有关概念
2. 矩阵的运算和算律，矩阵的多项式
3. 矩阵的转置及性质
4. 对角矩阵，数量矩阵、上（下）三角阵、对称矩阵、反对称矩阵

#### 第二节 矩阵乘积的行列式和秩

1. 矩阵乘积的行列式
2. 矩阵乘积的秩

#### 第三节 可逆矩阵

1. 可逆矩阵的定义及简单性质
2. 矩阵的等价及等价标准形
3. 初等矩阵，初等变换与初等矩阵的关系
4. 矩阵可逆的充要条件
5. 求逆矩阵的两种方法
6. Cramer 法则的矩阵形式

#### 第四节 矩阵的分块

1. 分块矩阵的概念
2. 分块矩阵的运算
3. 准对角矩阵的概念及有关性质

说明：大纲中教学内容带“\*”号的为选讲内容。

### 四、课学时分配

#### 1. 讲授内容及学时分配

章序	内容	课时	备注
一	一元多项式	18	
二	行列式	14	
三	线性方程组	16	
四	矩阵	16	
合计		64	

#### 2. 实践内容及学时分配

序号	项目名称	内容提要	学时	必/选开
1	一元多项式相关问题练习	1. 带余除法、辗转相除法。 2. 整除、因式分解、根。 3. 特殊数域上的因式分解。	4	必做
2	行列式的计算	1. 一般计算行列式的方法。 2. 特殊形式行列式的计算方法。 3. 克拉默法则。	4	必做
3	线性方程组解的相关理论练习	1. 消元法。 2. 向量的线性关系。 3. 矩阵的秩与线性方程组有解的判定。 4. 线性方程组的求解。	4	必做

4	矩阵的相关知识练习	1. 矩阵的计算。 2. 分块矩阵的计算。 3. 矩阵的初等变换与逆矩阵的求法。	4	必做
合计			16	

## 五、主用教材及参考书

### (一) 主用教材:

《高等代数》第四版 主编：北京大学数学系前代数小组  
出版社：高等教育出版社 出版时间：2013年。

### (二) 参考书:

1. 《高等代数》(第四版) 主编：张禾瑞、郝炳新  
出版社：高等教育出版社 出版或修订时间：1999年
2. 《高等代数简明教程》(上、下) 主编：蓝以中  
出版社：北京大学出版社 出版或修订时间：2002年
3. 《高等代数》(上、下) 主编：丘维声  
出版社：高等教育出版社 出版或修订时间：2013年

执笔：许寿方

审定：郭宏旻 梁桂珍