

《实变函数论》教学大纲

课程编码：1511102103

课程名称：实变函数论

学时/学分：54/3

先修课程：《数学分析》

适用专业：数学与应用数学

开课教研室：分析与方程教研室

一、课程性质与任务

1. 课程性质：《实变函数论》是数学与应用数学专业的重要专业方向课之一，它是数学分析的延续和发展，它主要应用点集分析的方法建立 n 维欧氏空间中点集的 Lebesgue 测度理论和点集上定义的 Lebesgue 积分理论。

2. 课程任务：通过这门课程的教学使学生了解测度的思想，掌握近代抽象分析的基本思想，系统掌握 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论，着重培养学生的思维能力和逻辑推理能力，为进一步钻研现代数学理论打下基础。

二、课程教学基本要求

通过这门课程的教学应使学生熟练掌握本课程的基本概念、基本理论及其推导过程。系统掌握 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论，使学生能够以更高的视角认识积分与微分，了解和掌握逐步深入地分析问题和解决问题的方法，提高分析问题和解决问题的能力，培养抽象的思维能力和逻辑推理能力，为进一步钻研现代数学理论打下基础。

本课程开设在第 6 学期，总学时 48，其中课堂讲授 48 学时。成绩考核形式：末考成绩（闭卷考试）（70%）+平时成绩（平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等）（30%）。成绩评定采用百分制，60 分为及格。

三、课程教学内容

第一章 集合与 R^n 中的点集

1. 教学基本要求

通过本章学习使学生理解集合的概念，分清集合的元与集合的归属关系，集与集之间的包含关系的区别。掌握集之间的运算，特别是集列的上、下限集。理解掌握一一映射、两集合对等及集合基数等概念。掌握可数集、基数为 C 的集合的性质。理解各种点的定义及之间的关系，掌握各种点集的定义及性质。掌握康托集的构造、特性。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生了解集的概念，分清集的元与集的归属关系，集与集之间的包含关系的区别。掌握集之间的交、差、余运算。掌握集列的上、下限集的概念及其交并表示。

理解集列的收敛、单调集列的概念。掌握一一映射，两集合对等及集合基数等概念。理解伯恩斯坦定理，能利用定义及伯恩斯坦定理证明两集合对等。理解可数集，不可数集的意义，掌握可数集、基数为 C 的集合的性质，理解不存在最大基数的定理的意义。

理解 n 维欧氏空间中极限概念主要依赖于距离这个概念，从而了解邻域概念在极限理论中的作用。理解聚点，孤立点、内点、外点、界点的意义，掌握有关性质。理解开集、闭集、完备集的意义，掌握其性质。理解直线上开集、闭集、完备集的构造。理解康托集的构造、特性。

3. 教学重点和难点

教学重点是可数集的概念、性质及其例子； σ -代数；开集, 闭集, Cantor 集。教学难点是可数集合的概念，集列的上下极限。

4. 教学内容

第一节 集与集的运算

1. 集合的基本概念
2. 集合的运算
3. 集列的极限

第二节 映射 可数集与基数

1. 映射
2. 可列集
3. 基数

第三节 集类

1. 代数与 σ -代数

第四节 R^n 中的点集

1. R^n 上的距离
2. 开集与闭集
3. R^n 上的连续函数
4. 开集的构造
5. Borel 集
6. Cantor 集

第二章 Lebesgue 测度

1. 教学基本要求

通过本章学习使学生理解测度和外测度意义，掌握其有关性质。理解可测集的定义，掌握可测集的性质。了解可测集与 Borel 集之间的关系。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生理解点集的外测度、测度、可测集的概念，掌握外测度的基本性质：非负性、单调性、次可数可加性，并掌握求简单集合外测度的方法。掌握可测集的定义和可测集的基本性质，特别是关于运算的封闭性，掌握可测集的逼近性质，了解可测集与 Borel 集之间的关系。

3. 教学重点和难点

教学重点是外测度的性质和可测集的定义及运算性质。教学难点是可测集的定义及性质、可测集的逼近性质。

4. 教学内容

第一节 外测度

1. 外测度的定义
2. 外测度的性质

第二节 可测集与测度

1. 可测集的定义
2. 可测集与测度的性质

第三节 可测集与测度（续）

1. 可测集的逼近性质

第三章 可测函数

1. 教学基本要求

通过本章学习使学生理解可测函数的定义及其等价描述，掌握可测函数的有关性质；掌握可测函数与简单函数的关系，熟悉可测函数的性质；理解依测度收敛概念，了解依测度收敛与几乎处处收敛的关系，掌握 Riesz 定理，了解 Egoroff 定理，了解函数的相对连续性及 Lusin 定理；理解可测函数与连续函数的关系。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握可测函数的定义及等价定义；掌握可测函数类对代数运算及极限运算的封闭性，理解简单函数的定义，掌握可测函数与简单函数的关系。掌握可测函数列的收敛点集和发散点集表示方法。掌握 Egoroff 定理，正确理解 Lusin 定理的意义并掌握其证明过程。理解依测度收敛的意义，掌握依测度收敛与 $a \cdot e$ 收敛的联系与区别。

3. 教学重点和难点

教学重点是可测函数的概念与性质，可测函数与简单函数的关系；依测度收敛；Egoroff 定理，Riesz 定理，Lusin 定理。教学难点是可测函数的定义，依测度收敛，Lusin 定理。

4. 教学内容

第一节 可测函数的性质

1. 可测函数的定义与例

2. 可测函数的运算封闭性
3. 可测函数用简单函数逼近

第二节 可测函数的收敛

1. 几乎处处成立的性质
2. 可测函数列几种收敛的定义与例
3. 几种收敛的相互关系

第三节 可测函数与连续函数

1. Lusin 定理
2. 扩张定理

第四章 Lebesgue 积分

1. 教学基本要求

通过本章学习使学生了解黎曼可积的充要条件是被积函数几乎处处连续;理解勒贝格积分的定义及其建立过程。理解 R 积分与 L 积分的关系。理解 L 积分的性质,掌握 L 积分的绝对可积性和绝对连续性。掌握积分的极限定理。了解富比尼定理。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生理解勒贝格积分的定义及其建立过程,掌握 L 积分的定义及性质,重点掌握运算的封闭性;掌握 L 积分的绝对可积性和绝对连续性;掌握积分的极限定理:勒贝格控制收敛定理、列维定理、逐项积分定理、积分的可数可加性定理, Fatou 引理;了解 Fubini 定理。

3. 教学重点和难点

教学重点是积分的定义和性质; Levi 单调收敛定理, Fatou 引理, 控制收敛定理; Fubini 定理。教学难点是积分的性质, 控制收敛定理。

4. 教学内容

第一节 积分的定义

1. 非负简单函数的积分
2. 非负可测函数的积分
3. 一般可测函数的积分
4. 可积性

第二节 积分的性质

1. 积分的初等性质
2. 复值可测函数的积分
3. 计算机科学技术的研究范畴

第三节 积分的极限定理

1. Levi 定理及推论

2. 控制收敛定理

第四节 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

1. Riemann 可积的一个充要条件

2. 一些例子

第五节 可积函数的逼近性质

1. 简单函数逼近

2. 连续函数逼近

第六节 Fubini 定理

1. Fubini 定理

2. 积分的几何意义

四、学时分配表

| 章序 | 内容 | 课时 | 备注 |
|----|----------------|----|----|
| 一 | 集合与 R^n 中的点集 | 14 | |
| 二 | Lebesgue 测度 | 12 | |
| 三 | 可测函数 | 14 | |
| 四 | Lebesgue 积分 | 14 | |
| 合计 | | 54 | |

五、主用教材及参考书

(一) 主用教材:

《实变函数论》 主编: 侯友良 出版社: 武汉大学出版社 出版或修订时间: 2008 年

(二) 参考书:

1. 《实变函数与泛函分析基础》(第三版) 主编: 程其襄、张奠宙等 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2010 年。

2. 《实变函数论》 主编: 江泽坚、吴智泉、纪友清 出版社: 高等教育出版社(第三版) 出版时间: 2007。

3. 《实变函数论》主编: 周民强 出版社: 北京大学出版社出版时间: 2001 年。

执笔: 李春燕

审定: 张 秦 梁桂珍