

《数学分析 II》教学大纲

课程编码： 1511100205

课程名称： 数学分析

学时/学分： 80/5

先修课程：《数学分析 I》

适用专业： 数学与应用数学专业

开课教研室： 分析与方程教研室

一、课程性质与任务

1. 课程性质：《数学分析 II》是数学与应用数学专业的一门重要的核心课程。研究的主要内容是如何求解不定积分和定积分，如何理解和讨论反常积分的敛散性，它是分析数学系列课程之一，也是其他后继课程的重要基础，在第 2 学期开设。

2. 课程任务：掌握不定积分的概念、计算方法，掌握定积分的概念、可积条件、计算方法及几何意义、定积分的几何应用和物理应用；反常积分敛散的概念和敛散性的基本判别方法；初步培养具有用定积分解决实际问题的能力和敛散性的思想，为分析数学及其后继课程的学习打好必要的基础知识。开设本课程的目的是培养学生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析和解决问题的能力。通过系统的学习与严格的训练，使学生全面掌握数学分析中的积分理论知识；提高建立数学模型并应用积分理论工具解决实际应用问题的能力。

二、课程教学基本要求

掌握微分中值定理及其应用。理解区间套定理，聚点定理，有限复盖定理，理解实数完备性的基本含义。掌握不定积分的概念与运算法则，熟练应用换元法和分部积分法求解不定积分，掌握求有理函数与部分无理函数不定积分的方法。理解定积分的概念，牢固掌握微积分基本定理：牛顿—莱布尼兹公式用于定积分的计算，熟练运用微元法解决几何，物理中的实际问题，初步掌握定积分的数值计算。掌握反常积分的概念，熟练掌握反常积分的收敛判别法与反常积分的计算。

本课程的成绩考核形式：末考成绩（闭卷考试）（70%）+平时成绩（平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等）（30%）。成绩评定采用百分制，60 分为及格。

三、课程教学内容

第六章 微分中值定理及其应用

1. 教学基本要求

(1) 深刻理解拉格朗日定理及其推论，掌握定理的证明，它的几种形式。

(2) 理解罗尔定理, 柯西定理, 泰勒定理的证明。

(3) 能用拉格朗日定理及其推论证明某些不等式, 掌握利用函数的泰勒展开式求一些函数的极限的方法。

(4) 熟悉掌握利用罗必达法则求各种不定型极限的方法。

(5) 掌握函数单调性与导数间的联系与几何意义; 明确函数在某一点 x_0 处单调的含义。掌握极限的要领与它的局部性质。

(6) 掌握函数凸凹的解析定义与几何意义。掌握函数单调性, 极值, 凸凹性, 拐点的判定方法。了解凸函数的基本性质。

(7) 掌握利用导数证明不等式的基本方法。掌握基本初等函数的特性作图方法。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习, 使学生掌握凸凹的解析定义, 理解罗尔定理, 柯西定理, 泰勒定理, 掌握利用罗必达法则求各种不定型极限的方法, 掌握函数单调性, 极值, 凸凹性, 拐点的判定方法。掌握利用导数证明不等式的基本方法。掌握基本初等函数的特性作图方法。

3. 教学重点和难点

教学重点是拉格朗日定理和函数的单调性; 柯西中值定理和不定式极限; 泰勒公式; 函数的极值与最大(小)值; 函数的凸性与拐点。教学难点是泰勒公式, 函数作图。

4. 教学内容

第一节 拉格朗日定理和函数的单调性

1. 罗尔定理与拉格朗日定理
2. 单调函数

第二节 柯西中值定理和不定式极限

1. 柯西中值定理
2. 不定式的极限

第三节 泰勒公式

1. 带有佩亚诺型余项的泰勒公式
2. 带有拉格朗日型余项的泰勒公式
3. 在近似计算上的应用

第四节 函数的极值与最大(小)值

1. 极值判别
2. 最大值与最小值

第五节 函数的凸性与拐点

1. 凸性的定义
2. 判断凸性的充要条件
3. 拐点的定义

4. 拐点的判定方法

第六节 函数图像的讨论

1. 函数作图的一般步骤

2. 函数作图的实例

第七章 实数的完备性

1. 教学基本要求

(1) 理解区间套定理, 聚点定理, 有限覆盖定理的意义。

(2) 了解区间套定理, 聚点定理, 有限覆盖定理。确界定理与单调有界定理, 柯西收敛准则的等价性, 理解实数完备性的基本含义。

(3) 理解“覆盖”, “区间套”, “聚点”的概念, 弄清聚点与收敛子数列间的关系。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习, 使学生掌握“覆盖”, “区间套”, “聚点”的概念, 理解区间套定理, 聚点定理, 有限覆盖定理的意义, 理解实数完备性的基本含义。掌握用区间套定理证明命题的方法。

3. 教学重点和难点

教学重点是区间套定理, 聚点定理和有限覆盖定理。教学难点是有关实数完备性基本定理的等价性的证明。

4. 教学内容

第一节 关于实数集完备性的基本定理

1. 区间套定理

2. 聚点定理与有限覆盖定理

第八章 不定积分

1. 教学基本要求

(1) 深刻理解原函数和不定积分的概念, 分清二者之间的区别与联系。

(2) 理解不定积分的几何意义。

(3) 掌握不定积分的运算法则。

(4) 牢固掌握换元积分法与分部积分法的技巧。

(5) 掌握有理函数积分法。

(6) 掌握化简单无理函数与三角函数为有理函数积分的方法。

(7) 掌握特殊三角函数的积分法。

(8) 掌握查不定积分表的方法。

(9) 理解初等函数的原函数不一定是初等函数, 而有理函数的原函数一定是初等函数。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习,使学生掌握原函数和不定积分的概念。掌握不定积分的运算法则,牢固掌握换元积分法与分部积分法的技巧,掌握有理函数积分法,掌握化简单无理函数与三角函数为有理函数积分的方法。

3. 教学重点和难点

教学重点是:不定积分的概念、性质和换元积分法、分部积分法,不定积分的基本公式,有理函数积分的计算,区分三角函数、无理函数的积分和可化为有理函数积分的类型。教学难点是:有理函数积分的计算,区分三角函数、无理函数的积分和可化为有理函数积分的类型。

4. 教学内容

第一节 不定积分概念与基本积分公式

1. 原函数与不定积分
2. 基本积分表

第二节 换元积分法与分部积分法

1. 换元积分法
2. 分部积分法

第三节 有理函数和可化为有理函数的不定积分

1. 有理函数的不定积分
2. 三角函数有理式的不定积分
3. 某些无理根式的不定积分

第九章 定积分

1. 教学基本要求

- (1) 深刻理解定积分定义及其几何意义。
- (2) 掌握可积的充分条件与必要条件。
- (3) 理解有界函数的达布上和、下和的概念及其性质。
- (4) 理解有界函数上、下和的概念以及与定积分概念之间的关系。
- (5) 掌握函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的一些等价命题。
- (6) 深刻理解变上限积分的概念及其连续性,可微性定理的证明。
- (7) 深刻理解微积分学基本定理,理解定积分与不定积分,微积分与积分之间的内在联系。
- (8) 熟练掌握用牛顿——莱布尼兹公式,变量替换公式及分部积分公式计算定积分。
- (9) 掌握证明函数可积性的方法。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习,使学生掌握定积分定义,有界函数的达布上和、下和的概念,变上限积

分的概念。深刻理解微积分学基本定理，掌握函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的一些等价命题，熟练掌握用牛顿——莱布尼兹公式，变量替换公式及分部积分公式计算定积分。

3. 教学重点和难点

教学重点是定积分的概念，定积分的思想，牛顿——莱布尼茨公式，定积分的性质，积分中值定理，可积的判断方法，微积分基本定理和定积分的计算。教学难点是证明函数的可积性。

4. 教学内容

第一节 定积分的概念

1. 问题提出
2. 定积分的定义

第二节 牛顿——莱布尼茨公式

1. 牛顿——莱布尼茨公式
2. 应用牛顿——莱布尼茨公式求定积分

第三节 可积条件

1. 可积的必要条件
2. 可积的充要条件
3. 可积函数类

第四节 定积分的性质

1. 定积分的基本性质
2. 积分中值定理

第五节 微积分学基本定理·定积分的计算（续）

1. 变限积分与原函数的存在性
2. 换元积分法与分部积分法
3. 泰勒公式的积分型余项

第十章 定积分的应用

1. 教学基本要求

- (1) 理解曲线段可求长的概念。
- (2) 掌握光滑曲线、微分曲线的曲率，曲率半径，曲率圆等概念。
- (3) 掌握微元法的定义。
- (4) 掌握弧长公式的推导。
- (5) 掌握求平面图形的面积、旋转曲面的面积，由平行截面面积求体积。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握曲线段可求长的概念，微元法的定义。掌握弧长公式，求平面图形的面积、旋转曲面的面积，由平行截面面积求体积。

3. 教学重点和难点

教学重点是定积分在几何和物理方面的应用。教学难点是微元法。

4. 教学内容

第一节 平面图形的面积

1. 平面图形的面积公式
2. 利用面积公式求平面图形面积

第二节 由平行截面面积求体积

1. 空间立体 Ω 的体积
2. 旋转体的体积

第三节 平面曲线的弧长与曲率

1. 平面曲线的弧长
2. 曲率

第四节 平面图形的面积

1. 微元法
2. 旋转曲面的面积

第五节 定积分在物理中的某些应用

1. 液体静压力
2. 引力
3. 功与平均功率

第十一章 反常积分

1. 教学基本要求

- (1) 理解无穷限反常积分、无界函数反常积分概念。
- (2) 熟练掌握反常积分的收敛判别法与反常积分的计算方法。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握无穷限反常积分、无界函数反常积分概念。熟练掌握反常积分的收敛判别法与反常积分的计算方法。

3. 教学重点和难点

教学重点是两种反常积分的定义和性质；反常积分的判敛法；反常积分的计算方法。教学难点是反常积分的 **Cauchy** 收敛原理，非负函数无穷积分的比较判别法，**Cauchy** 判别法，以及一般函数反常积分的 **Abel**，**Dirichlet** 判别法。

4. 教学内容

第一节 反常积分的概念

1. 问题提出
2. 两类反常积分的定义

第二节 无穷积分的性质与收敛判别

1. 无穷积分的性质
2. 非负函数无穷积分的收敛判别法
3. 一般无穷积分的收敛判别法

第三节 瑕积分的性质与收敛判别

1. 瑕积分的性质
2. 非负函数瑕积分的收敛判别法
3. 一般瑕积分的收敛判别法

四、学时分配表

1. 讲授内容及学时分配

章序	内容	课时	备注
六	微分中值定理及其应用	18	
七	实数的完备性	4	
八	不定积分	10	
九	定积分	16	
十	定积分的应用	8	
十一	反常积分	8	
合计		64	

2. 实践内容及学时分配

序号	项目名称	内容提要	学时	必/选开
1	微分中值定理及其应用 习题课	1. 利用导数证明不等式 2. 用罗必达法则求各种不定型极限 3. 求函数单调性, 极值, 凸凹性, 拐点	4	必开
2	不定积分习题课	1. 利用换元积分法与分部积分法求不定积分 2. 求有理函数的不定积分和可化为有理函数的不定积分	2	必开
3	定积分习题课	1. 证明函数的可积性 2. 定积分的计算 3. 利用换元积分法证明某些结论	4	必开

4	定积分的应用习题课	用微元法解决应用问题	2	必开
5	反常积分习题课	1. 无穷积分的收敛判别 2. 瑕积分的收敛判别	4	必开
合计			16	

五、主用教材及参考书

(一) 主用教材:

《数学分析》(第四版)上册 主编:华东师范大学数学系 出版社:高等教育出版社 出版时间:2010年。

(二) 参考书:

1. 《数学分析》(第二版) 主编:陈传璋,金福临,朱学炎,欧阳光中 出版社:高等教育出版社 出版时间:2002年。

2. 《数学分析》(第一版) 主编:陈纪修,於崇华,金路著 出版社:高等教育出版社 出版时间:2002年。

3. 《数学分析中的典型问题与方法》 主编:裴礼文 出版社:高等教育出版社 出版时间:2006年。

执笔: 雷轶菊

审定: 张 秦 梁桂珍